第 2 节 常规的数列求和方法（★★★）

强化训练

类型Ⅰ：错位相减与裂项相消

1．（★★）设 $a_n=(2n-1)\cdot 3^n$，求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

解：（$\{2n-1\}$ 是等差数列，$\{3^n\}$ 是等比数列，两者相乘可用错位相减法求其前 n 项和）

由题意，$\begin{cases} S_n=1\times 3^1+3\times 3^2+5\times 3^3+\cdots+(2n-3)\cdot 3^{n-1}+(2n-1)\cdot 3^n & ① \\ 3S_n=\qquad 1\times 3^2+3\times 3^3+5\times 3^4+\cdots+(2n-3)\cdot 3^n+(2n-1)\cdot 3^{n+1} & ② \end{cases}$，

所以① − ②可得 $-2S_n=3+2\times 3^2+2\times 3^3+\cdots+2\times 3^n-(2n-1)\cdot 3^{n+1}$，

（去除首尾两项，中间的 $2\times 3^2+2\times 3^3+\cdots+2\times 3^n$ 是等比数列求和，共 $n-1$ 项）

故 $-2S_n=3+\dfrac{2\times 3^2(1-3^{n-1})}{1-3}-(2n-1)\cdot 3^{n+1}=3+3^2(3^{n-1}-1)-(2n-1)\cdot 3^{n+1}$

$=3+3^{n+1}-9-(2n-1)\cdot 3^{n+1}=(2-2n)\cdot 3^{n+1}-6$，

所以 $S_n=(n-1)\cdot 3^{n+1}+3$.

2．（2023・辽宁模拟・★★）已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q\neq 1$，且 $a_1=2$，$2a_1+a_3=3a_2$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，求数列 $\{\dfrac{n}{S_n+2}\}$ 的前 n 项和 T_n，证明：$T_n<1$.

解：（1）（已知 a_1，将 $2a_1+a_3=3a_2$ 用通项公式翻译出来，即可求出 q）

因为 $2a_1+a_3=3a_2$，所以 $2a_1+a_1q^2=3a_1q$，故 $2+q^2=3q$，解得：$q=2$ 或 1，

又 $q\neq 1$，所以 $q=2$，故 $a_n=a_1q^{n-1}=2\times 2^{n-1}=2^n$.

（2）由（1）可得 $S_n=2+2^2+\cdots+2^n=\dfrac{2\times(1-2^n)}{1-2}=2^{n+1}-2$，所以 $\dfrac{n}{S_n+2}=\dfrac{n}{2^{n+1}-2+2}=\dfrac{n}{2^{n+1}}$，

（像 $\dfrac{n}{2^{n+1}}$ 这种 $\dfrac{\text{等差}}{\text{等比}}$ 的分式结构，可在和式两端同乘以分母的公比来错位）

故 $\begin{cases} T_n=\qquad\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{2}{2^3}+\dfrac{3}{2^4}+\cdots+\dfrac{n-1}{2^n}+\dfrac{n}{2^{n+1}} & ① \\ 2T_n=\dfrac{1}{2^1}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\cdots+\dfrac{n-1}{2^{n-1}}+\dfrac{n}{2^n} & ② \end{cases}$，

② − ①可得：$T_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}-\dfrac{n}{2^{n+1}}=\dfrac{\frac{1}{2}[1-(\frac{1}{2})^n]}{1-\frac{1}{2}}-\dfrac{n}{2^{n+1}}=1-(\dfrac{1}{2})^n-\dfrac{n}{2^{n+1}}$，

（要进一步化简，可将$(\frac{1}{2})^n$变形成$\frac{2}{2^{n+1}}$，调整为与$\frac{n}{2^{n+1}}$次数相同的结构）

所以$T_n=1-\frac{2}{2^{n+1}}-\frac{n}{2^{n+1}}=1-\frac{n+2}{2^{n+1}}$，因为$\frac{n+2}{2^{n+1}}>0$，所以$T_n<1$.

3.（2023·贵州模拟·★★）公比为q的等比数列$\{a_n\}$满足$a_1+a_5=17$，$a_4+a_8=136$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若$b_n=\log_2 a_{n+1}$，记$\{b_n\}$的前n项和为T_n，求$\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}+\cdots+\frac{1}{T_n}$.

解：（1）由题意，$\begin{cases}a_1+a_5=a_1(1+q^4)=17 & ① \\ a_4+a_8=a_1q^3+a_1q^7=a_1q^3(1+q^4)=136 & ②\end{cases}$，用②除以①可得$q^3=8$，所以$q=2$，

代入①可得$a_1=1$，所以$a_n=a_1q^{n-1}=2^{n-1}$.

（2）由（1）可得$b_n=\log_2 a_{n+1}=\log_2 2^n=n$，所以$b_{n+1}-b_n=n+1-n=1$，故$\{b_n\}$是等差数列，

所以$T_n=\frac{n(b_1+b_n)}{2}=\frac{n(1+n)}{2}$，故$\frac{1}{T_n}=\frac{2}{n(n+1)}$，（注意到$n$与$n+1$是前后项关系，故可裂项）

所以$\frac{1}{T_n}=\frac{2}{n(n+1)}=2(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$，故$\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}+\cdots+\frac{1}{T_n}=2(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=2(1-\frac{1}{n+1})=\frac{2n}{n+1}$.

4.（2023·甘肃兰州模拟改·★★）已知等差数列$\{a_n\}$为递增数列，其前n项和为S_n，$S_6=36$，且a_1，a_2，a_5成等比数列.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）令$b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}$，若T_n为数列$\{b_n\}$的前n项和，求T_n.

解：（1）设$\{a_n\}$的公差为d，因为$\{a_n\}$是递增数列，所以$d>0$，又$S_6=36$，所以$6a_1+15d=36$ ①，

因为a_1，a_2，a_5成等比数列，所以$a_2^2=a_1a_5$，故$(a_1+d)^2=a_1(a_1+4d)$，结合$d>0$整理得：$d=2a_1$，

代入①可得$a_1=1$，所以$d=2$，故$a_n=a_1+(n-1)d=2n-1$.

（2）（看到$b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}$，想到裂项）由（1）可得$b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$，

所以$T_n=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})$.

5.（★★★）在各项均为正数的等差数列$\{a_n\}$中，a_1，a_2，a_6构成公比不为1的等比数列，S_n是数列$\left\{\frac{1}{a_na_{n+1}}\right\}$的前$n$项和.

（1）若$a_1=\frac{1}{3}$，设$b_n=a_n+\frac{2}{3}$，求数列$\left\{\frac{1}{b_nb_{n+1}}\right\}$的前$n$项和$T_n$；

（2）若对任意的$n\in\mathbf{N}^*$，$S_n>\frac{1}{a_1}$，证明：$a_1<\frac{1}{3}$.

解：（1）设$\{a_n\}$的公差为d，因为a_1，a_2，a_6构成公比不为1的等比数列，所以$d\neq 0$，且$a_2^2=a_1a_6$，

故$(a_1+d)^2=a_1(a_1+5d)$，整理得：$d=3a_1$，所以$a_n=a_1+(n-1)d=a_1+(n-1)\cdot 3a_1=(3n-2)a_1$，

结合$a_1=\frac{1}{3}$可得$a_n=n-\frac{2}{3}$，所以$b_n=a_n+\frac{2}{3}=n$，故$\frac{1}{b_nb_{n+1}}=\frac{1}{n(n+1)}$，（分母为前后项关系，考虑裂项求和）

所以$\frac{1}{b_nb_{n+1}}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，故$T_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$.

（2）由（1）可得$a_n=(3n-2)a_1$，（尽管a_1未知，但$\frac{1}{a_na_{n+1}}$的分母仍为前后项关系，可裂项求和）

因为$\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{d}(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}})$，所以$S_n=\frac{1}{d}(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}})=\frac{1}{d}(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}})$，

故$S_n>\frac{1}{a_1}$即为$\frac{1}{d}(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}})>\frac{1}{a_1}$，（要证的是$a_1<\frac{1}{3}$，故全部用$a_1$表示）

所以$\frac{1}{3a_1}[\frac{1}{a_1}-\frac{1}{(3n+1)a_1}]>\frac{1}{a_1}$ ①，因为$\{a_n\}$各项均为正数，

所以$a_1>0$，故由式①整理得：$a_1<\frac{1}{3}(1-\frac{1}{3n+1})$，因为$\frac{1}{3}(1-\frac{1}{3n+1})<\frac{1}{3}$，所以$a_1<\frac{1}{3}$.

6.（2022·山西模拟·★★★）已知正项数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_2=2$，$a_na_{n+2}=2a_{n+1}^2(n\in\mathbf{N}^*)$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设$b_n=\log_2 a_{n+1}$，数列$\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$的前$n$项和为$S_n$，求数列$\{\lg S_n\}$的前99项和.

解：（1）因为$a_na_{n+2}=2a_{n+1}^2$，所以$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=2\cdot\frac{a_{n+1}}{a_n}$，又$a_1=1$，$a_2=2$，所以$\frac{a_2}{a_1}=2$，

故数列$\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$是以2为首项，2为公比的等比数列，所以$\frac{a_{n+1}}{a_n}=2^n$，（要由此式求$a_n$，可用累乘法）

当$n\geq 2$时，$a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot a_1=2^{n-1}\cdot 2^{n-2}\cdots 2^2\cdot 2^1\cdot 1=2^{1+2+\cdots+(n-1)}=2^{\frac{n(n-1)}{2}}$，

又$a_1=1$也满足上式，所以$\forall n\in\mathbf{N}^*$，都有$a_n=2^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

（2）由（1）可得$b_n=\log_2 a_{n+1}=\log_2 2^{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{n(n+1)}{2}$，所以$\frac{1}{b_n}=\frac{2}{n(n+1)}=2(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$，

从而$S_n=2(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=2(1-\frac{1}{n+1})=\frac{2n}{n+1}$，故$\lg S_n=\lg\frac{2n}{n+1}$，

（同底对数的加法有公式，故直接相加即可求和）

所以$\lg S_1+\lg S_2+\cdots+\lg S_{99}=\lg\frac{2\times 1}{2}+\lg\frac{2\times 2}{3}+\lg\frac{2\times 3}{4}+\cdots+\lg\frac{2\times 99}{100}$

$=\lg(\frac{2\times 1}{2}\times\frac{2\times 2}{3}\times\frac{2\times 3}{4}\times\cdots\times\frac{2\times 99}{100})=\lg(2^{99}\times\frac{1}{100})=\lg 2^{99}+\lg\frac{1}{100}=99\lg 2-2$.

类型Ⅱ：分组求和与倒序相加

7．（2023 •全国模拟 •★★）数列$\{a_n\}$满足$a_n=3n+1$，数列$\{b_n\}$的前 n 项和为T_n，且$b_n=(-1)^{n+1}a_n$，则$T_{19}=$_____.

答案：31

解析：直接观察$\{b_n\}$的通项找不到求和的思路，故先列几项看看规律，

$\{b_n\}$中的项为：4，-7，10，-13，16，-19，…，

我们发现若每 2 项分一组，则每组的和都是-3，前 19 项可分 9 组余 1 项，

所以$T_{19}=(b_1+b_2)+(b_3+b_4)+\cdots+(b_{17}+b_{18})+b_{19}$

$=9\times(-3)+(-1)^{19+1}a_{19}=-27+(3\times19+1)=31.$

8．（2023 • 福建模拟 • ★★★）数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=n\cos\dfrac{n\pi}{2}+1$，其前 n 项和为S_n，则$S_{100}=$_____.

答案：150

解析：a_n由$n\cos\dfrac{n\pi}{2}$和 1 两部分构成，可分别求和再相加，设$b_n=n\cos\dfrac{n\pi}{2}$，数列$\{b_n\}$的前 n 项和为T_n，

下面先求T_n，直接观察$\{b_n\}$的通项找不到求和的思路，故先列几项看看规律，

$\{b_n\}$中的项为：0，-2，0，4，0，-6，0，8，…，

我们发现若每 4 项分一组，则每组的和都是 2，

所以$T_{100}=(b_1+b_2+b_3+b_4)+(b_5+b_6+b_7+b_8)+\cdots+(b_{97}+b_{98}+b_{99}+b_{100})=2\times25=50$，

因为$a_n=b_n+1$，所以$S_{100}=T_{100}+100=150$.

9．（2023 • 辽宁沈阳模拟 • ★★★★）已知函数$f(x+\dfrac{1}{2})$为奇函数，且$g(x)=f(x)+1$，若$a_n=g(\dfrac{n}{2023})$，则数列$\{a_n\}$的前 2022 项和为_____.

答案：2022

解析：由题意，$a_1+a_2+\cdots+a_{2021}+a_{2022}=$

$g(\dfrac{1}{2023})+g(\dfrac{2}{2023})+\cdots+g(\dfrac{2021}{2023})+g(\dfrac{2022}{2023})$ ①，

上式与函数$g(x)$有关，故先由条件分析$g(x)$的性质，

将$f(x)$左移$\dfrac{1}{2}$个单位得到奇函数$f(x+\dfrac{1}{2})$，该函数关于原点对称，所以$f(x)$关于点$(\dfrac{1}{2},0)$对称，

又$g(x)=f(x)+1$，所以将$f(x)$上移 1 个单位可得到$g(x)$，

从而$g(x)$关于点$(\dfrac{1}{2},1)$对称，故$g(x)+g(1-x)=2$，

由此可发现在求式①的值时，应将自变量之和为 1 的两项组合，为了便于观察，我们用倒序相加法，

记$S=g(\dfrac{1}{2023})+g(\dfrac{2}{2023})+\cdots+g(\dfrac{2021}{2023})+g(\dfrac{2022}{2023})$ ②，

则 $S=g(\frac{2022}{2023})+g(\frac{2021}{2023})+\cdots+g(\frac{2}{2023})+g(\frac{1}{2023})$ ③，

②＋③可得 $2S=[g(\frac{1}{2023})+g(\frac{2022}{2023})]+[g(\frac{2}{2023})+g(\frac{2021}{2023})]$

$+\cdots+[g(\frac{2022}{2023})+g(\frac{1}{2023})]=2+2+\cdots+2=2\times2022$，

所以 $S=2022$.

10.（2023・青海一模・★★★）在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1+a_2=5a_2=\frac{5}{4}$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）求数列 $\{\frac{3}{4}a_n+2n-1\}$ 的前 n 项和 S_n.

解：（1）设 $\{a_n\}$ 的公比为 q，因为 $a_1+a_2=5a_2=\frac{5}{4}$，所

以 $a_2=\frac{1}{4}$，$a_1=4a_2=1$，从而 $q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{4}$，故 $a_n=(\frac{1}{4})^{n-1}$.

（2）由（1）可得 $\frac{3}{4}a_n+2n-1=\frac{3}{4}\cdot(\frac{1}{4})^{n-1}+2n-1$

$=3\cdot(\frac{1}{4})^n+2n-1$，

（此数列由等比部分 $3\cdot(\frac{1}{4})^n$ 和等差部分 $2n-1$ 相加构成，可分别求和再相加）

所以 $S_n=3\times(\frac{1}{4})^1+1+3\times(\frac{1}{4})^2+3+\cdots+3\times(\frac{1}{4})^n+2n-1$

$=3\times[(\frac{1}{4})^1+(\frac{1}{4})^2+\cdots+(\frac{1}{4})^n]+[1+3+\cdots+(2n-1)]$

$=3\times\frac{\frac{1}{4}\times[1-(\frac{1}{4})^n]}{1-\frac{1}{4}}+\frac{n(1+2n-1)}{2}=1-(\frac{1}{4})^n+n^2$.

11.（★★★★）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，$a_{n+1}=a_n^2(n\in\mathbf{N}^*)$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $b_n=\log_2a_n+\log_2(\log_2a_n)$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

解：（1）（受第二问 b_n 的结构的启发，我们可以试试将题干的递推公式两端取对数来看）

因为 $a_{n+1}=a_n^2$，所以 $\log_2a_{n+1}=\log_2a_n^2=2\log_2a_n$，

又 $a_1=2$，所以 $\log_2a_1=1$，故 $\{\log_2a_n\}$ 是首项为 1，公比为 2 的等比数列，

所以 $\log_2a_n=2^{n-1}$，故 $a_n=2^{2^{n-1}}$.

（2）由（1）可得 $b_n=\log_2 2^{2^{n-1}}+\log_2(\log_2 2^{2^{n-1}})=2^{n-1}+\log_2(2^{n-1})=2^{n-1}+n-1$，

（2^{n-1} 和 $n-1$ 分别为等比、等差数列，各自都能求和，故将它们分别求和再相加，即得 $\{b_n\}$ 的前 n 项和）

所以 $S_n=\frac{1\times(1-2^n)}{1-2}+\frac{n(0+n-1)}{2}=2^n-1+\frac{n(n-1)}{2}$.

【反思】涉及 $a_{n+1}=a_n^k(k$ 为常数$)$ 这类递推公式，可考虑两端取对数，构造等比数列求通项.